

**IAG171-01-2013**  
**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DAS FRAÇÕES PARCIAIS PARA**  
**OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES VISCOELÁSTICAS DE MISTURAS**  
**ASFÁLTICAS**  
**IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES**  
**PARA OBTENER LAS PROPIEDADES VISCOELÁSTICAS DE LAS**  
**MEZCLAS ASFÁLTICAS**

Tiago Pereira Armão  
Universidade Federal de Pelotas  
Pelotas, Brasil  
tiago\_a2@hotmail.com

Klaus Machado Theisen  
Universidade Federal de Pelotas  
Pelotas, Brasil  
theisenkm@yahoo.com.br

Thiago Lunardi Camargo  
Universidade Federal de Pelotas  
Pelotas, Brasil  
thiago.lunardicamargo@gmail.com

## **RESUMO**

Propriedades constitutivas em que são impostas cargas (tensões) no ensaio e são medidos os deslocamentos resultantes (deformações), que no caso de misturas asfálticas propriedades como a curva de fluência  $D(t)$ , são de mais fácil obtenção experimental. Contudo, a obtenção das propriedades inversas, como o módulo de relaxação  $E(t)$ , não é trivial, pois exige uma estrutura experimental mais complexa. Como solução para o problema, a inversão das propriedades obtidas experimentalmente pode ser feita através de métodos numéricos, obtendo as propriedades invertidas indiretamente. O Método das Frações Parciais (MFP) apresenta a vantagem de todos os parâmetros serem calculados diretamente, sem arbítrios e/ou métodos iterativos, fornecendo a solução exata do problema. Posta esta questão, a presente pesquisa objetivou implementar o MFP, aplicando-o para dados conhecidos de misturas asfálticas, de modo a se obter um procedimento preciso para inversão de propriedades constitutivas viscoelásticas. A execução numérica do Método das Frações Parciais dividiu-se em duas grandes rotinas computacionais. A partir dos parâmetros constitutivos de uma dada propriedade da mistura asfáltica no qual se deseja obter a correspondente propriedade inversa, implementou-se uma rotina para obtenção de uma equação polinomial da qual extraíam-se os tempos de relaxação correspondentes às parcelas viscoelásticas por meio de algoritmos pré-existent em softwares matemáticos. Então, após a elaboração de uma rotina de solução de sistemas de equações, baseada no método da matriz inversa, obteve-se, enfim, as constantes de rigidez procuradas que descrevem a propriedade inversa procurada. A validação dos resultados obtidos foi realizada através de dados encontrados na literatura cujo procedimento de inversão de propriedades foi feito via métodos consagrados, os quais puderam confirmar a eficiência das rotinas elaboradas, revelando que as implementações desenvolvidas neste projeto podem ser utilizadas como opção no processo de obtenção de propriedades difíceis de

serem encontradas experimentalmente, a partir de propriedades inversas da mistura asfáltica facilmente arrançadas.

## RESUMEN

Propiedades constitutivas en que se imponen cargas (tensiones) en el ensayo y son medidos los desplazamientos resultantes (deformaciones), que en el caso de las misturas asfálticas propiedades como la curva de fluencia  $D(t)$ , son de más fácil obtención experimental. Sin embargo, la obtención de las propiedades inversas, como el módulo de relajación  $E(t)$ , no es trivial porque exige una estructura experimental más compleja. Como solución para el problema, la inversión de las propiedades obtenidas experimentalmente puede ser hecha por medio de métodos numéricos, obteniendo las propiedades invertidas indirectamente. El Método de las Fracciones Parciales (MFP) presenta la ventaja de que todos los parámetros son calculados directamente, sin arbitrios y/o métodos iterativos, forneciendo la solución exacta del problema. Siendo así, la presente pesquisa objetivó implementar el MFP, aplicando-lo para datos conocidos de misturas asfálticas, con el fin de obtener un procedimiento preciso para la inversión de las propiedades constitutivas viscoelásticas. La implementación numérica del Método de las Fracciones Parciales se dividió en dos rutinas principales computacionales. A partir de los parámetros constitutivos de una dada propiedad de la mezcla de asfáltica en el que si desea obtener la correspondiente propiedad inversa, se implementó una rutina para obtener una ecuación de polinomios donde extraían los tiempos de relajación correspondiente a las parcelas viscoelásticas mediante algoritmos preexistentes en softwares matemáticos. Entonces, después de la elaboración de una rutina de solución de sistemas de ecuaciones, basado en el método de la matriz inversa, obtiene-se, al final, las constantes de rigidez buscadas que describe la propiedad inversa buscada. La validación de los resultados obtenidos fue hecha por medio de datos encontrados en la literatura cuyos procedimientos de inversión de propiedades fue hecho mediante métodos consagrados, estos que confirmaran la eficacia de las rutinas elaboradas, revelando que las implementaciones elaboradas en este proyecto pueden ser utilizadas como opción en el proceso de obtención de propiedades difíciles de ser encontradas experimentalmente, partiendo de propiedades inversas de la mezcla asfáltica fácilmente arregladas.

## INTRODUÇÃO

Os materiais asfálticos fazem parte do grupo de materiais em que o comportamento dependente do tempo é bastante perceptível, devido ao fato destes materiais fluírem com maior facilidade, especialmente a altas temperaturas. Uma das principais consequências deste comportamento são as deformações permanentes observadas na camada de superfície dos pavimentos asfálticos. A observância neste tipo de material de uma relação tensão-deformação dependente do tempo caracteriza as misturas asfálticas como materiais viscoelásticos.

A obtenção de propriedades constitutivas viscoelásticas em que é imposta uma tensão no ensaio e as deformações resultantes são medidas - no caso de misturas asfálticas propriedades como a curva de fluência  $D(t)$  - são de fácil obtenção experimental. Contudo, a obtenção das propriedades inversas, como o módulo de relaxação  $E(t)$ , não é trivial, pois exige uma estrutura experimental mais complexa, no qual são impostas deformações e

medidas as tensões resultantes. As deformações são muito pequenas no regime linear, representando uma dificuldade no processo.

Como solução para o problema, a inversão das propriedades obtidas experimentalmente pode ser feita através de métodos numéricos obtendo as propriedades invertidas indiretamente. Um método muito conhecido é o Método das Frações Parciais (MFP) que apresenta a vantagem de todos os parâmetros da propriedade constitutiva inversa serem calculados diretamente, sem arbítrios e/ou métodos iterativos. Contudo, ainda não existe uma rotina computacional que viabilize a utilização deste método.

Posta esta questão, o presente trabalho tem por objetivo implementar o MFP, de modo a se obter um procedimento preciso para inversão de propriedades constitutivas viscoelásticas.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Um material viscoelástico é definido como um material que armazena parcialmente a energia interna fornecida em função das solicitações externas aplicadas. No caso dos materiais elásticos, tal energia é totalmente armazenada, enquanto que existe dissipação total de energia no caso dos materiais viscosos. Tal fato faz com que materiais viscoelásticos tenham um comportamento intermediário entre um sólido e fluído. (Vilson e Hilton, 2006). Estes, dentro da teoria da viscoelasticidade, podem apresentar comportamento viscoelástico linear ou não linear.

Pesquisas nacionais, como as de Falcão e Soares (2002), Soares e Souza (2003) e Theisen (2006), além de pesquisas internacionais como as de Kim e Wen (2002), Kim *et al.* (2004), Kim (2009), Masad *et al.* (2005) e Masad *et al.* (2009) evidenciam que misturas asfálticas apresentam inegavelmente comportamento viscoelástico linear para os casos de cargas suficientemente pequenas e de número baixo de repetições, e para casos de grande número de aplicações de carga, o fenômeno da fadiga ganha importância.

Segundo Di Benedetto *et al.* (2001) para garantir às misturas asfálticas um comportamento viscoelástico linear existem níveis de deformações e de número de ciclos limites. Os autores mostram estes limites em um diagrama (Figura 1), notando-se que o comportamento viscoelástico linear é garantido se o número de aplicações de carga for menor que 1000 aplicações e as deformações não ultrapassarem a ordem de  $10^{-4}$  unidades de deformação.

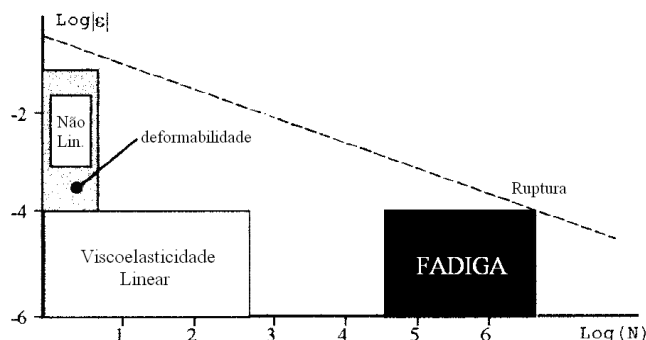
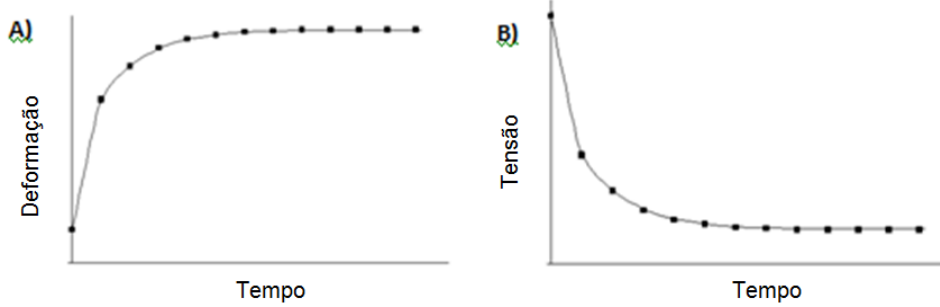


Figura 1: Diagrama de limites de comportamento das misturas asfálticas (adaptado de Di Benedetto *et al.*, 2001)

Garantida a viscoelasticidade linear, as misturas asfálticas apresentam comportamentos típicos que provam seu comportamento viscoelástico. Dentre eles, destacam-se a fluência (*creep*) e a relaxação (*relaxation*).

A fluência é uma deformação lenta e progressiva do material quando submetido a uma tensão constante  $\sigma_0$  (Lakes, 1998). Resultados típicos de ensaios de *creep* são deformações crescentes ao longo do tempo com declividade decrescente. Uma assíntota pode ou não ser notada quando a tensão é aplicada por longo tempo, dependendo se o material tende a se comportar como um sólido ou um fluido (Christensen, 1971). A Relaxação é um decréscimo gradual da tensão quando o material é mantido sob deformação constante  $\varepsilon_0$  (Lakes, 1998). As formas típicas das curvas de fluência e de relaxação são vistas na Figura 2.



**Figura 2: Diagramas típicos de misturas viscoelásticas. (A) Fluência e (B) Relaxação**

Devido à dependência do tempo e da taxa de aplicação de carga (ou deslocamento), as equações constitutivas dos materiais viscoelásticos deixam de ser algébricas, como é o caso das relações elásticas, e passam a ser representadas por integrais de convolução. Para o caso uniaxial, as relações tensão-deformação dos materiais viscoelásticos lineares são dadas pelas equações 1 e 2.

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t D(t, t') \frac{\partial \sigma(t')}{\partial t'} dt' \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t E(t, t') \frac{\partial \varepsilon(t')}{\partial t'} dt' \quad (2)$$

onde  $\varepsilon(t)$  refere-se a deformação em função do tempo;  $\sigma(t)$  é como a tensão varia em função do tempo;  $t_0$  é o instante inicial de aplicação de carga;  $t'$  é a variável de integração, que representa o instante de início de aplicação de carga;  $D(t, t')$  é a função da curva de fluência ou *creep compliance* (se esta não depende de  $t'$ , pode ser modelada como uma função  $D(t-t')$ ); e  $E(t, t')$  é a função da curva de relaxação ou *relaxation modulus* (se esta não depende de  $t'$ , pode ser modelada como uma função  $E(t-t')$ ).

Para que as Equações 1 e 2 possam ser resolvidas, é necessário que se utilize uma função matemática capaz de descrever as funções  $E(t)$  e  $D(t)$  no domínio de integração com relação ao tempo. Para propriedades independentes de  $t'$  (desprezando-se efeitos de envelhecimento e da temperatura), o tipo de ajuste mais empregado é o ajuste em séries de Prony, descritas nas equações 3 e 4, que são somatórios de séries exponenciais derivadas dos modelos mecânicos generalizados de Kelvin (Voigt) e/ou Maxwell considerando-se solitação unitária.

$$D(t-t') = D_\infty - \sum_{i=1}^n D_i e^{-(t-t')/\tau_i} \quad (3)$$

$$E(t-t') = E_{\infty} + \sum_{j=1}^m E_j e^{-(t-t')/\rho_j} \quad (4)$$

onde  $E_{\infty}$  refere-se ao módulo de relaxação para  $t=\infty$ ;  $E_j$  é a rigidez elástica de cada parcela viscoelástica do módulo de relaxação;  $\rho_j$  é tempo de relaxação de cada parcela do módulo de relaxação;  $D_{\infty}$  refere-se a compliância a longo prazo;  $D_i$  é a compliância de cada parcela viscoelástica da curva de fluência;  $\tau_i$  é o tempo de retardação de cada parcela da curva de fluência; e  $n$  é número de parcelas viscoelásticas consideradas na curva de fluência.

Das equações 3 e 4, após aplicações da transformada inversa de Fourier, é obtida a relação entre as propriedades constitutivas em questão, vista na equação 5.

$$\int_0^t D(t-t')E(t')dt' = t \quad (5)$$

## O Método das Frações Parciais

O Método das Frações Parciais (MFP) é usado para decompor funções racionais em formas mais simples, normalmente objetivando processos simplificados de integração ou obtenção de transformadas inversas de Fourier. No MFP, parte-se de uma equação da forma descrita na equação 6, reescrevendo-a na forma expressa pela equação 7.

$$\frac{p(i\omega)}{(i\omega - r_1)(i\omega - r_2)(i\omega - r_3)\dots(i\omega - r_n)} \quad (6)$$

$$\frac{A_1}{(i\omega - r_1)} + \frac{A_2}{(i\omega - r_2)} + \frac{A_3}{(i\omega - r_3)} + \dots + \frac{A_n}{(i\omega - r_n)} \quad (7)$$

Se aplicadas transformadas de Fourier nas equações 3 e 4, estas representarão as propriedades viscoelásticas referidas no domínio frequência, cujo formato algébrico é idêntico ao visto na equação 7. Além disto, se aplicada transformada de Fourier na equação 5, posteriormente substituindo-se as funções  $D(t)$  e  $E(t)$  no domínio frequência nesta equação, é possível formar uma função como a equação 6 que pode ser rearranjada conforme a equação 7, tornado o MFP prático para propriedades viscoelásticas exponenciais no domínio tempo.

## METODOLOGIA

A inversão das propriedades constitutivas viscoelásticas pode ser feita considerando dois domínios: tempo e frequência. No domínio tempo, o método mais conhecido é o de Park e Schapery (1999). No domínio frequência, destaca-se o Método das Frações Parciais (MFP), no qual se aplica transformadas de Fourier e obtém os módulos no domínio complexo, aplicando-se transformadas integrais inversas posteriormente. No método descrito por Theisen (2011) para descrição do MFP considera-se  $D(t)$  uma compliância qualquer escrita na forma da equação 3 e a curva a ser obtida pelo método,  $E(t)$ , o módulo correspondente à compliância  $D(t)$ , escrita na forma da equação 4.  $D(t)$  e  $E(t)$  relacionam-se através da equação 5. Aplicando a transformada de Fourier nas equações 3, 4 e 5, e substituindo o resultado obtido das equações 3 e 4 na equação 5, encontram-se as equações 8 e 9, escritas no domínio frequência. A equação 8 é o denominador obtido ao isolar a curva de relaxação na equação 5 no domínio frequência, de forma a igualá-lo conforme o formato visto

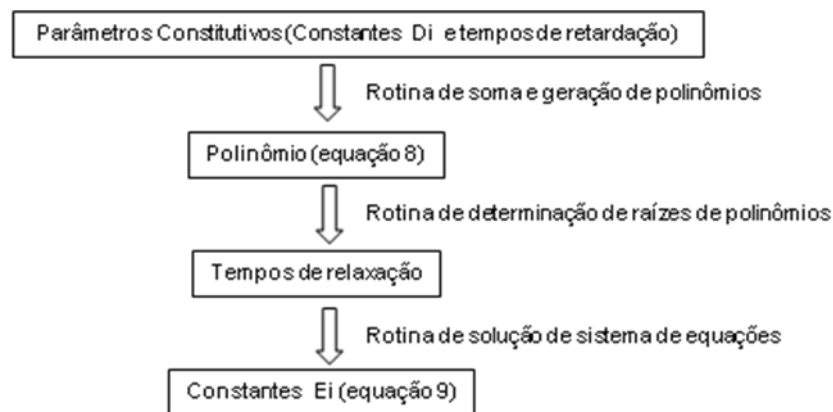
na equação 6. Como o denominador representa um polinômio com raízes  $a_i$ , devem ser extraídas as raízes do polinômio formado pelo denominador para sequência da metodologia.

$$i\omega \left[ D_\infty \left( \prod_{i=1}^n i\omega + \frac{1}{\tau_i} \right) - \sum_{i=1}^n D_i \left( \left( \prod_{j=\infty}^n i\omega + \frac{1}{\tau_j} \right) / \left( i\omega + \frac{1}{\tau_i} \right) \right) \right] = 0 \quad (8)$$

$$E_\infty \left( \prod_{i=1}^n i\omega - r_i \right) + \sum_{k=1}^n E_k \frac{\prod_{j=\infty}^n i\omega - r_j}{i\omega - r_k} = \frac{1}{D_\infty - \sum_{i=1}^n D_i} \prod_{j=1}^n i\omega - \frac{1}{\tau_j} \quad (9)$$

Das raízes  $r_i$  do polinômio expresso pela equação 8 são calculados os tempos de relaxação  $\rho_i$  da curva de relaxação, onde  $r_i = -1/\rho_i$ , sendo  $\rho_i$  o tempo de relaxação correspondente à parcela viscoelástica  $j$ ,  $j = \infty, 1, 2, \dots, n$  e  $\tau_\infty = \infty$ . A equação 9 forma um sistema de equações, utilizado para o cálculo das constantes  $E_i$ , onde  $r_\infty = 0$ . Tal sistema de equações é formado igualando os polinômios em ambos os dados da equação 5 no domínio frequência, de modo que a linha  $i$  do sistema representa a igualdade das constantes multiplicativas do termo  $(i\omega)^{n+1-i}$  de ambos os lados da equação. O sistema formado possui  $n+1$  equações.

As etapas para execução numérica do Método das Frações Parciais, divididas em rotinas computacionais, são simplificadas na Figura 3 que segue. A partir dos parâmetros constitutivos de uma dada propriedade da mistura asfáltica no qual se deseja obter a correspondente propriedade inversa, implementou-se uma rotina para obtenção de uma equação polinomial na forma da equação 8, da qual extraíam-se os tempos de relaxação correspondentes às parcelas viscoelásticas por meio de algoritmos pré-existentes em softwares matemáticos. Então, após a elaboração de uma rotina de solução de sistemas de equações, baseada no método da matriz inversa, obteve-se, enfim, as constantes de rigidez procuradas que descrevem a propriedade inversa procurada.



**Figura 3: Fluxograma para implementação do Método das Frações Parciais**

Para verificação das rotinas implementadas, o método foi testado de duas formas: partindo dos dados da curva de fluência  $D(t)$  para obter o módulo de relaxação  $E(t)$  e partindo dos dados do módulo de relaxação  $E(t)$  para se obter a curva de fluência  $D(t)$ . Foram utilizados os dados das publicações de Souza (2005) e Gibson *et al.* (2003), que obtiveram a

curva de fluência  $D(t)$  e sua respectiva propriedade inversa, o módulo de relaxação  $E(t)$  via métodos consagrados.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

As constantes obtidas pelo Método das Frações Parciais para os dados de Souza (2005) estão descritas na Tabela 1 e para os dados de Gibson *et al.* (2003), na Tabela 2.

**Tabela 1: Constantes obtidas pelo MFP para dados de Souza (2005) (A) partindo de  $D(t)$  e (B) partindo de  $E(t)$**

i	Souza (2005)		Resultado MFP		Erro %	
	Ei (kPa)	$\rho_i$ (s)	Ei (kPa)	$\rho_i$ (s)	Erro Ei (%)	Erro $\rho_i$ (%)
inf	407.9	-	408.0104	-	0.03	-
1	2179000	0.00087	2887581	0.000871	32.52	0.10
2	2675000	0.0057	2241803	0.005703	-16.19	0.06
3	3125000	0.062	3311254	0.061979	5.96	-0.03
4	992900	0.46	931111.2	0.456321	-6.22	-0.80
5	447700	4.5	464660.8	4.470473	3.79	-0.66
6	15200	41	13213.0	41.20109	-13.07	0.49
7	9284	240	9722.678	244.5622	4.73	1.90
8	1748	1900	1617.159	1941.861	-7.49	2.20
9	553.5	24000	563.0136	23745.186	1.72	-1.06

i	Souza (2005)		Resultado MFP		Erro %	
	Di (1/kPa)	$\tau_i$ (s)	Di (1/kPa)	$\tau_i$ (s)	Erro Di (%)	Erro $\tau_i$ (%)
inf	2.451E-03	-	2.452E-03	-	0.03	-
1	3.487E-08	0.0012	2.631E-08	0.001107	-24.54	-7.68
2	5.978E-08	0.0083	6.789E-08	0.008816	13.56	6.22
3	2.509E-07	0.17	2.455E-07	0.162893	-2.15	-4.18
4	8.123E-07	1.3	8.234E-07	1.360029	1.37	4.62
5	2.178E-06	34	2.36E-06	32.97842	8.36	-3.00
6	1.699E-05	140	1.625E-05	141.8726	-4.37	1.34
7	7.829E-05	1200	7.849E-05	1143.939	0.26	-4.67
8	5.392E-04	7900	5.448E-04	8031.297	1.05	1.66
9	1.813E-03	71000	1.808E-03	71109.56	-0.26	0.15

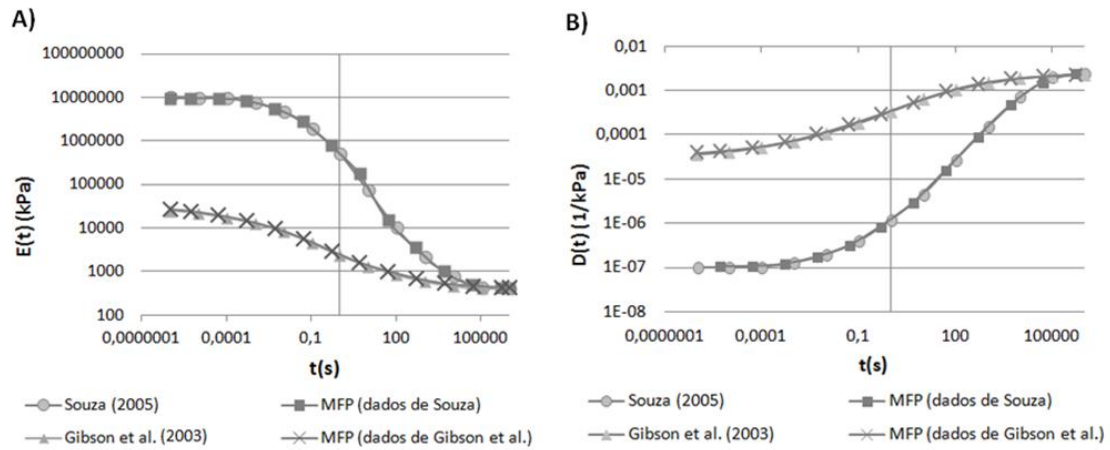
**Tabela 2: Constantes obtidas pelo MFP para dados de Gibson *et al.* (2003) (A) partindo de  $D(t)$  e (B) partindo de  $E(t)$**

i	Gibson et al. (2003)		Resultado MFP		Erro %	
	Ei (kPa)	$\rho_i$ (s)	Ei (kPa)	$\rho_i$ (s)	Erro Ei (%)	Erro $\rho_i$ (%)
inf	4.13E+05	-	4.14E+05	-	0.32	-
1	2.16E+06	1.50E-07	-5.19E+04	1.13E-07	-102.40	-24.53
2	3.85E+06	2.81E-06	3.26E+06	1.88E-06	-15.15	-33.23
3	5.73E+06	5.27E-05	6.17E+06	3.02E-05	7.69	-42.74
4	6.53E+06	9.87E-04	6.48E+06	4.99E-04	-0.84	-49.42
5	5.29E+06	1.85E-02	5.86E+06	7.75E-03	10.92	-58.09
6	2.96E+06	3.47E-01	3.79E+06	1.24E-01	28.21	-64.19
7	1.23E+06	6.49E+00	1.86E+06	2.18E+00	51.34	-66.41
8	4.59E+05	1.22E+02	7.29E+05	4.71E+01	58.97	-61.33
9	1.80E+05	2.28E+03	2.50E+05	1.17E+03	39.19	-48.75
10	7.42E+04	4.27E+04	8.91E+04	2.68E+04	20.10	-37.19
11	-3.21E+04	8.01E+05	3.73E+04	5.52E+05	-216.17	-31.03
12	1.43E+04	1.50E+07	1.59E+04	1.08E+07	11.48	-27.79

i	Gibson et al. (2003)		Resultado MFP		Erro %	
	Di (1/kPa)	$\tau_i$ (s)	Di (1/kPa)	$\tau_i$ (s)	Erro Di (%)	Erro $\tau_i$ (%)
inf	2.41E-06	-	2.42E-06	-	0.32	-
1	4.22E-09	2.11E-06	6.11E-09	3.28E-06	44.74	55.26
2	1.17E-08	3.95E-05	1.39E-08	6.99E-05	18.65	77.01
3	2.37E-08	7.40E-04	3.33E-08	1.58E-03	40.55	112.95
4	5.67E-08	1.39E-02	8.42E-08	3.62E-02	48.54	160.97
5	1.41E-07	2.60E-01	2.10E-07	7.68E-01	49.29	195.32
6	3.40E-07	4.87E+00	4.24E-07	1.35E+01	24.75	176.87
7	5.96E-07	9.13E+01	5.64E-07	2.03E+02	-5.33	122.73
8	5.77E-07	1.71E+03	4.91E-07	3.07E+03	-14.89	79.62
9	3.53E-07	3.20E+04	3.11E-07	4.97E+04	-11.64	55.25
10	1.89E-07	6.00E+05	1.66E-07	8.61E+05	-11.84	43.43
11	9.04E-08	1.13E+07	8.19E-08	1.55E+07	-9.46	37.97

Para as constantes descritas por Souza (2005) ( $i=9$ ), os erros percentuais mantiveram-se baixos, sendo máximos em 8% para  $\tau$ , 25% para  $D$ , 2% para  $\rho$  e 33% para  $E$ . Contudo, para os dados de Gibson *et al.* (2003) ( $i=12$ ) não se obteve o mesmo sucesso, obtendo-se erros máximos de 195% para  $\tau$ , 49% para  $D$ , 66% para  $\rho$  e 216% para  $E$ . As possíveis razões para tal fato podem ser explicadas por questões numéricas de precisão de armazenamento numérico do programa utilizado no qual, no mesmo sistema de equações, há números variando na ordem de  $10^{-6}$  até  $10^{23}$ . Quanto maior a variabilidade dos tempos de retardação, resultado de um maior número de termos na série de Prony (maior  $i$ ), mais extrema é esta diferença de ordem numérica.

Contudo, embora tenham sido encontrados erros significativos nas constantes obtidas pelo MFP, o comportamento das curvas  $E(t)$  e  $D(t)$  é essencialmente o mesmo quando comparados com os dados da literatura, conforme mostra os gráficos da Figura 4, em que as curvas obtidas pelo MFP sobrepõem as curvas experimentais da literatura com perfeição, comprovando a eficiência das rotinas implementadas.

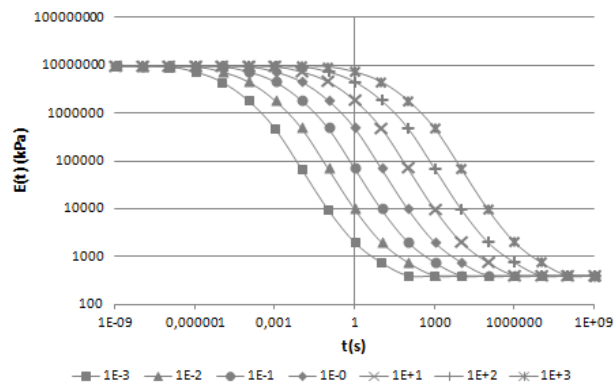


**Figura 4: Comparativo de curvas experimentais e MFP para (A) curva  $E(t)$  e (B) curva  $D(t)$**

Com o objetivo de se testar a influência da variação dos tempos de retardação nos resultados obtidos, as constantes  $\tau_i$  da curva de fluência  $D(t)$  de Souza (2005) multiplicadas por um fator de mudança  $\alpha$ , variando de  $10^{-3}$  a  $10^3$ , conforme visto na equação 10:

$$D(t-t') = D_\infty - \sum_{i=1}^n D_i e^{-(t-t')/(\alpha \tau_i)} \quad (10)$$

Após a rotina de solução de polinômios, nota-se que o MFP obtém tempos de relaxação iguais àqueles quando  $\alpha=1$  (constantes  $\rho_i$  descritas na Tabela 1A, para o MFP) multiplicados pelo próprio fator  $\alpha$  em questão, além de constantes de rigidez elásticas  $E_i$  iguais. O fato resulta em curvas de relaxação  $E(t)$  idênticas, transladadas horizontalmente, variando somente o tempo necessário para sair do módulo inicial e para chegar ao módulo final, conforme mostra a Figura 5.



**Figura 5: Curva  $E(t)$  do MFP para dados de Souza (2005) para diferentes fatores  $\alpha$**

Estes resultados refletem em parâmetros semelhantes àqueles de misturas asfálticas ensaiadas a diferentes temperaturas, apresentando o mesmo comportamento na curva  $E(t)$ . Percebe-se pela Figura 5 que para menores valores de  $\alpha$  (maiores temperaturas), o valor da curva rapidamente cai em função do tempo. Este é o comportamento de materiais viscoelásticos descoberto e modelado por Williams et al. (1995), denominado de termorreologicamente simples. Considerando que, segundo Theisen (2011), os parâmetros constitutivos deste tipo de material i) possuem a mesma forma no plano log-log para qualquer



temperatura, resultando em curvas paralelas no plano log-log e ii) têm valor para tempo igual a 0 e tempo igual a infinito semelhantes para qualquer temperatura, o que mudará para as diferentes temperaturas é o tempo necessário para sair do módulo inicial e para chegar ao módulo final. Assim, demonstra-se que o MFP pode ser empregado para construção de curvas mestras de misturas asfálticas, pois mantém as hipóteses do comportamento de materiais termorreologicamente simples.

## CONCLUSÕES

A validação dos resultados obtidos em função dos dados da literatura pôde confirmar a eficiência das rotinas elaboradas, o que se refletiu na curva  $E(t)$ , que revela o comportamento do material ao longo do tempo, com a vantagem da solução ser direta e obtida por métodos puramente numéricos, excluindo fases de arbítrio ou extração gráfica de constantes, como em Park e Schapery (1999).

Entretanto, o método mostrou-se fortemente dependente da precisão numérica dos programas empregados para implementação do MFP, e sensível ao aumento do número de parâmetros da série, devido a grande variação na ordem de grandeza das variáveis envolvidas no processo. Ainda assim, embora a existência de erros elevados nas constantes obtidas, os resultados aproximam-se fortemente dos resultados reais, comprovando a eficácia do método e das rotinas utilizadas.

Por fim, mesmo que o método seja melhor no sentido de programação, deve-se estar atento a precisão numérica do programa utilizado, além de que as rotinas empregadas devem ser cuidadosamente analisadas e programadas para que não haja interpretações errôneas que podem incidir no projeto dos pavimentos flexíveis onde for empregada a mistura em questão.

## REFERÊNCIAS

- CHRISTENSEN, R.M. (1971). *Theory of Viscoelasticity: an Introduction*. New York: Academic Press, 245p.
- DI BENEDETTO, H.; PARTL, M.N.; FRANCKEN L.; DE LA ROCHE, C. (2001). Stiffness testing for bituminous mixtures. *Materials and Structures/Matériaux et Constructions*, v.34, p.66-70.
- FALCÃO, M.F.B. e SOARES, J.B. (2002). Considerações Sobre o Ensaio de Compressão Diametral no Estudo de Materiais de Pavimentação. *Associação Nacional de Ensino e Pesquisa em Transportes (ANPET) – anais*, v.1.
- GIBSON, N.H.; SCHWARTZ, C.W., SCHAPERY, R.A., WITCZAK, M.W. (2003). Viscoelastic, Viscoplastic, and Damage Modeling of Asphalt Concrete in Unconfined Compression. *Transportation Research Board (TRB) Annual Meeting CD-ROM*;
- KIM, Y. R. (2009). *Modeling of Asphalt concrete*. 1st edition. McGraw-Hill Professional.
- KIM, Y.R.; SEO, Y.; KING, M.; MOMEM, M. (2004). Dynamic Modulus Testing of Asphalt Concrete in Indirect Tension Mode. *Transportation Research Board (TRB) Annual Meeting CD-ROM*.
- KIM, Y. R.; WEN, H. (2002). Fracture energy from indirect tension testing. *Proceedings of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 18p.
- LAKES, R.S. (1998). *Viscoelastic Solids*. Mechanical Engineering Series, CRC Press, Boca Raton-FL, 448p.
- MASAD, E.; HUANG, C.W.; AIREY, G. e MULIANA, A. (2009). Nonlinear viscoelastic analysis of unaged and aged asphalt binders. *Construction and Building Materials*, n.22, p.2170–2179.

- MASAD, E.; TASHMAN, L.; LITTLE, D.; ZBIB, H. (2005). Viscoplastic modeling of asphalt mixes with the effects of anisotropy, damage and aggregate characteristics. *Mechanics of Materials*, n. 37 p.1242–1256.
- PARK, S. e SCHAPERY, R. A. (1999). Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I – an numerical method based on Prony Series” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 36, p 1653-1975.
- SOUZA, F.V. (2005). Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos Sucetíveis a Dano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, 189p.
- THEISEN, K.M. (2011). Estudo de parâmetros constitutivos extraídos de dados experimentais no comportamento de misturas asfálticas. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.
- THEISEN, K.M. (2006). Aplicação do Princípio da Correspondência Elasto-viscoelástica para Previsão de Deformabilidade de Misturas Asfálticas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 150p.
- VINSON, J.R. e HILTON, H.H. (2006). Composite Material Structures and Viscoelasticity: Theory & Applications. AIAA Short Course for SDM, April 29 – 30.
- ZHONG, Y., GENG, L. (2009). Thermal stresses of asphalt pavement under dependence of material characteristics on reference temperature. *Mechanics of Time-dependent Materials*, v.13, 81–91.
- WILLIAMS, M. L., R. F. LANDEL, e FERRY, J. D. (1955). “Temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous and other glass forming liquids,” *J. Am. Chem. Soc.* 77, 3701–3706.